Introducción a los conjuntos

Olvida todo lo que sabes sobre números. Olvídate de que sabes lo que es un número. Aquí es donde empiezan las matemáticas. En vez de matemáticas con números, vamos a hacer matemáticas con "cosas".

Definición

¿Qué es un conjunto? Bueno, por decirlo de una manera simple es **una colección**. Primero eliges una propiedad común a unas "cosas" (esto lo definiremos luego) y después reúnes las "cosas" que tienen esa propiedad.

Por ejemplo, la ropa que llevas: podrían ser zapatos, calcetines, sombrero, camisa, pantalones y otras cosas.

Seguro que a ti se te ocurrirían cien por lo menos.

Esto es un **conjunto**.

Otro ejemplo sería tipos de dedos.

Este conjunto tendría pulgar, índice, medio, corazón y meñique.

Así que son sólo cosas juntas que tienen una misma propiedad.

Notación

Hay una notación para conjuntos bastante simple. Los dos ejemplos de arriba son:

{calcetines, zapatos, relojes, faldas, ...}
{pulgar, índice, medio, corazón, meñique}

Fíjate que uno tiene "...". Esto sólo quiere decir que el conjunto sigue indefinidamente. A lo mejor no hay infinitas cosas distintas que ponerse, pero no estoy seguro de eso. Después de pensarlo durante una hora, todavía no estoy seguro. El primer conjunto es un **conjunto infinito**, el segundo es un **conjunto finito**.

Conjuntos de números

¿Qué tiene esto que ver con matemáticas? Cuando definimos un conjunto, todo lo que hace falta es una propiedad común. ¿Quién dice que no se puede hacer lo mismo con números?

Conjunto de números pares: {..., -4, -2, 0, 2, 4, ...}
Conjunto de números impares: {..., -3, -1, 1, 3, ...}
Conjunto de números primos: {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...}
Múltiplos positivos de 3 que son menores que 10: {3, 6, 9}

Y la lista sigue. Podemos inventar muchos conjuntos distintos.

También hay conjuntos de números que no cumplen una propiedad común, simplemente **se definen así**. Por ejemplo:

{2, 3, 6, 828, 3839, 8827}
{4, 5, 6, 10, 21}
{2, 949, 48282, 42882959, 119484203}

Todos estos conjuntos los he escrito aporreando mi teclado sin mirar.

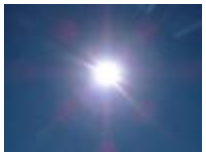
¿Por qué son importantes los conjuntos?

Los conjuntos son los ladrillos fundamentales de las matemáticas. Es verdad que los conjuntos, por sí solos, no parecen nada del otro mundo. Pero cuando los aplicas en distintas situaciones es cuando se convierten en los bloques con los que las matemáticas se construyen.

> *Las matemáticas se pueden complicar mucho rápidamente. Teoría de grafos, álgebra astracta, análises real, análisis complejo, álgebra lineal, teoría de números, y la lista sigue y sigue. Pero hay una cosa que todas estas partes de las matemáticas tienen en común:* ***los conjuntos***.

> *Las matemáticas se pueden complicar mucho rápidamente. Teoría de grafos, álgebra astracta, análises real, análisis complejo, álgebra lineal, teoría de números, y la lista sigue y sigue. Pero hay una cosa que todas estas partes de las matemáticas tienen en común:* ***los conjuntos***.

Conjunto universal

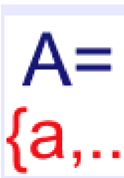


Al principio usamos la palabra "cosas" entre comillas. Esto se llama el **conjunto universal**. Es un conjunto que contiene todo. Bueno, No todo *de verdad*. **Todo lo que tiene que ver con el problema que tienes entre manos.**

Hasta ahora, los conjuntos que te he dado contenían números enteros. Así que el conjunto universal aquí serían los enteros. De hecho, cuando uno hace Teoría de Números, casi siempre ese es el conjunto universal, porque la Teoría de Números es la parte de las matemáticas que estudia los enteros.

Sin embargo en Análisis Real, el conjunto universal es casi siempre los números reales. Y en Análisis Complejo, el conjunto universal es los números complejos.

Más notación



Cuando hablamos de conjuntos, es normal usar letras mayúsculas para llamar al conjunto, y letras minúsculas para los elementos de ese conjunto.

Así que por ejemplo A es un conjunto, y a es un elemento de A. Lo mismo con B y b, y con C y c.

No pasa nada si no sigues esa regla, puedes usar algo como ***m*** para representar un conjunto sin romper reglas matemáticas (ojo, pasarás $\boldsymbol{\pi}$ años en la cárcel por dividir entre 0), pero esta notación es fácil de seguir, así que ¿por qué no usarla?

También, cuando decimos que un elemento **a** está en un conjunto **A**, usamos el símbolo $\in$ para mostrarlo.
Y si algo no está en un conjnto usamos $\notin$.

Ejemplo: el conjunto **A** es {1,2,3}. Como puedes ver **1** $\in$ **A**, pero **5** $\notin$ **A**

Igualdad

Dos conjuntos son iguales si tienen exactamente los mismos miembros. Quizás no parezcan iguales a primera vista, ¡tienes que mirarlos bien!

Ejemplos: Son A y B iguales si:

- A es el conjunto de los cuatro primeros enteros positivos
- B = {4, 2, 1, 3}

Vamos a verlo. Los dos contienen 1. Y 2. Y 3, y 4. Y ya hemos comprobado los elementos de los dos conjuntos, así que: **¡Sí, son iguales!**

Y el signo igual (=) se usa precisamente para indicar igualdades, así que escribimos:

A = B

Subconjuntos

Cuando definimos un conjunto, si tomamos partes de él tenemos algo que se llama un **subconjunto**.

Así que por ejemplo tenemos el conjunto {1, 2, 3, 4, 5}. Un subconjunto suyo es {1, 2, 3}. Otro subconjunto es {3, 4} y otro es {1}. Sin embargo, {1, 6} no es un subconjunto, porque contiene un elemento (el 6) que no está en el conjunto grande. En general:

A es subconjunto de B si y sólo si cada elemento de A está en B.

Así que vamos a usar esta definición en algunos ejemplos.

¿Es A subconjunto de B, si A = {1, 3, 4} y B = {1, 4, 3, 2}?
1 está A, pero 1 también está en B. Por ahora bien. 2 está en B, pero no en A. Pero recuerda que eso no importa, sólo hay que mirar los elementos de A. 3 está en A y también en B. Falta uno más. 4 está A, y en B. Esos son todos los elementos de A, y están todos en B, así que ya está.

Vamos a intentar un ejemplo más difícil.

Sean A todos los múltiplos de 4 y B todos los múltiplos de 2. ¿Es A un subconjunto de B? ¿Es B un subconjunto de A?
Bueno, no se pueden comprobar todos los elementos de estos conjuntos, porque hay infinitos elementos. Así que tenemos que hacernos una idea de cómo son los elementos en cada uno, y comparar.
Para representar un múltiplo de 2, usamos 2n, donde n es un entero. Y hacemos lo mismo con los múltiplos de 4: son 4m, donde m es entero. Así que si tenemos un número 4m, ¿lo podemos escribir como un múltiplo de 2, con la forma 2n? ¡Claro que podemos!
Sabemos que 4 = 2*2, así que 4m = 2*2m, o mejor 2(2m). También sabemos que 2m es un entero. Así que vamos a llamar a = 2m, donde a es un entero. Entonces podemos decir que 4m = 2*2m = 2(2m) = 2(a). Como a es un entero, 2a es prácticamente lo mismo que 2n. Quiero decir, lo único que pasa es que usamos otra letra, pero no importa qué letra usemos. Así que A es un subconjunto de B.
¿Pero es B un subconjunto de A? Bueno, podemos probar a hacer lo mismo. Tenemos 2n y queremos que sea como 4m. Una manera de hacer eso sería multiplicarlo por 2 para que tengamos 2*2n o lo que es lo mismo 4n. Pero

recuerda lo de arriba, sólo podemos usar el signo igual. Si multiplicas un número por 2, ya no es igual a lo que era. Así que nos hemos topado con un muro. No parece que 2n se pueda hacer parecido a 4m. ¿A lo mejor lo que queremos es falso? Vamos a probar lo contrario, a ver si es verdad que B no es subconjunto de A. ¿Cómo lo haríamos? Bueno, nos basta encontrar un elemento de B que no esté en A. Todo lo que hay que hacer es buscar un elemento así. Queremos un múltiplo de 2 que no sea múltiplo de 4. Pero de hecho, 2 es múltiplo de 2, pero no es múltiplo de 4. Así que 2 está en B pero no en A, y entonces B no es subconjunto de A.

Subconjuntos propios

Si nos fijamos en la definición de subconjunto y dejamos que nuestra mente trabaje un poco, llegamos a una conclusión rara. Digamos que **A** es un conjunto. ¿Es verdad que todo elemento **a** de **A** también es un elemento de **A**? Bueno, está claro que sí, ¿no? ¿Y eso no significa que *A es un subconjunto de A*? Esto no parece muy correcto, ¿no? Queremos que nuestros subconjuntos sean propios. Así que introducimos la definición de **subconjuntos propios**.

A es un subconjunto propio de B si y sólo si cada elemento de A está en B, y existe **por lo menos un elemento** de B que no está en A.

Esta pequeña parte del final es la que hace que A no sea un subconjunto propio de sí mismo. Por lo demás, un subconjunto propio es lo mismo que un subconjunto normal.

Así que por ejemplo, {1, 2, 3} **es** un subconjunto de {1, 2, 3}, pero **no es un subconjunto propio** de {1, 2, 3}.
Por otra parte, {1, 2, 3} **es** un **subconjunto propio** de {1, 2, 3, 4} porque el elemento 4 no está en el primer conjunto.

Fíjate en que si A es un subconjunto propio de B, entonces también es un subconjunto de B.

Más notación

Cuando decimos que A es un subconjunto de B, escribimos A $\subseteq$ B.

O podemos decir que A no es subconjunto de B: A $\nsubseteq$ B ("A no es subconjunto de B")

Cuando hablamos de subconjuntos propios, quitamos la línea de debajo y queda A $\subset$ B o para decir lo contrario, A $\not\subset$ B.

Conjunto vacío

Probablemente esto es lo más raro que tienen los conjuntos.

Por ejemplo, piensa en el conjunto de teclas de piano que tiene una guitarra.

"¡Pero espera!" seguro que dices, "¡Una guitarra no tiene teclas!"

Y tienes toda la razón. Este conjunto **no tiene elementos**.

A este conjunto se le llama **conjunto vacío**. No tiene elementos. Ni uno.

Se representa como $\varnothing$

Otro ejemplo de conjunto vacío es **el conjunto de países al sur del polo sur**.

¿Y qué es tan extraño sobre el conjunto vacío? Bueno, esa parte viene ahora.

El conjunto vacío y subconjuntos

Volvamos a la definición de subconjunto. Tenemos un conjunto A. No decimos más de él, podría ser cualquier conjunto. ***¿El conjunto vacío es subconjunto de A?***

Volviendo a la definición de subconjunto, **si todo elemento del conjunto vacío también está en A, entonces el conjunto vacío es subconjunto de A**. ¿Pero y si **no hay** elementos?

Hay falta aprender algo de lógica para entender esto, pero esa frase es verdadera de manera "vacía" o "trivial". Piénsalo de esta manera: *no podemos encontrar elementos en el conjunto vacío que no estén en A*, así que todos los elementos del conjunto vacío están en A.

Así que la respuesta a la pregunta que hicimos es un sonoro **sí**.

El conjunto vacío es subconjunto de todos los conjuntos, incluido él mismo.

Cardinal

Todo conjunto tiene una propiedad asociada llamada **cardinal**. Es simplemente **el tamaño del conjunto**.

De la misma manera que hay conjuntos finitos e infinitos, estos tienen cardinal finito e infinito. Para conjuntos finitos, lo representamos con un número, el número de elementos. Por ejemplo, {1, 2, 3, 4} tiene cardinal 4. Sobre conjuntos infinitos, sólo podemos decir que tienen cardinal infinito. Aunque parezca raro, hay infinitos más grandes que otros, pero este es un tema avanzado en teoría de conjuntos.