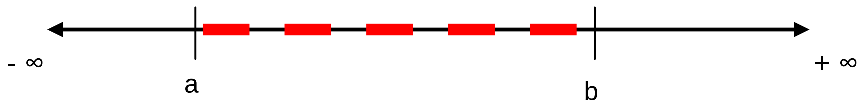
Material para uso didáctico
Elaborado por: Ing. Leonardo Romero
UNEFA NÚCLEO TÁCHIRA

INECUACIONES.

<u>Intervalos en la Recta Real</u>:

Dados dos números cualesquiera a y b, tales que a < b de la recta real, se define **intervalo** de extremos a y b al conjunto de los números reales comprendidos entre a y b



El segmento $\overline{ab}$ se llama intervalo.

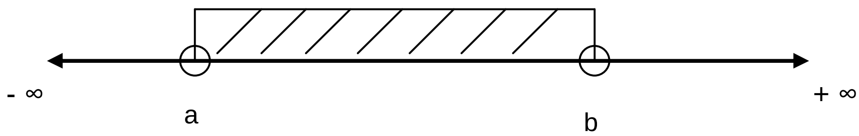
<u>Clasificación de los Intervalos</u>:

a) Abierto en ambos extremos:

Notación: (a,b)

En forma de conjunto: $(a,b) = \{x \in IR \ / \ a < x < b\}$

Representación Gráfica:

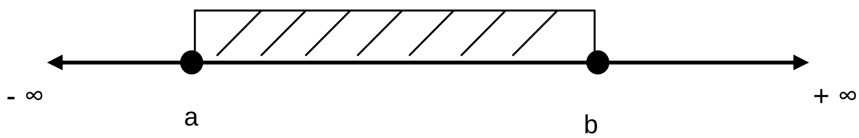


b) Cerrado en ambos extremos:

Notación: $[a,b]$

En forma de conjunto: $[a,b] = \{x \in IR \ / \ a \le x \le b\}$

Representación Gráfica:

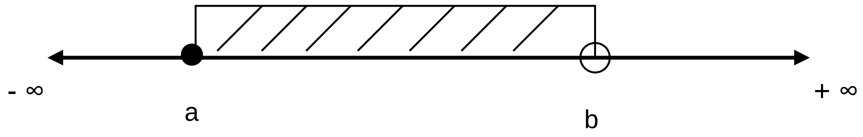


c) Semiabierto por la derecha:

Notación: $[a,b)$

En forma de conjunto: $[a,b) = \{x \in IR \ / \ a \leq x \ < b\}$

Representación Gráfica:

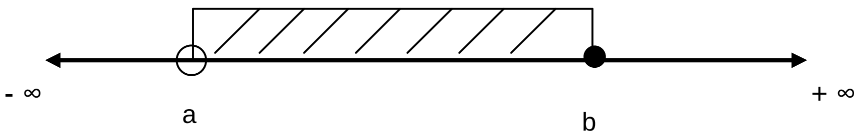


d) Semiabierto por la izquierda:

Notación: $(a,b]$

En forma de conjunto: $(a,b] = \{x \in IR \ / \ a < x \ \leq b\}$

Representación Gráfica:

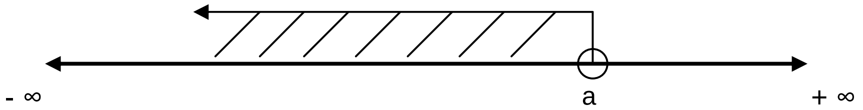


e) Abierto por la derecha que se extiende hacia la izquierda:

Notación: $(-\infty, a)$

En forma de conjunto: $(-\infty, a) = \{x \in IR \ / \ x < a\}$

Representación Gráfica:

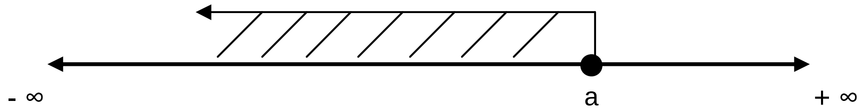


f) Cerrado por la derecha que se extiende hacia la izquierda:

Notación: $(-\infty, a]$

En forma de conjunto: $(-\infty, a] = \{x \in IR \ / \ x \leq a\}$

Representación Gráfica:

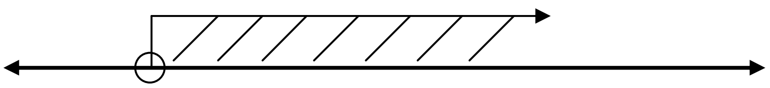


g) Abierto por la izquierda que se extiende hacia la derecha:

Notación: $(a,+\infty)$

En forma de conjunto: $(a,+\infty) = \{x \in IR \,/\, x > a\}$

Representación Gráfica:



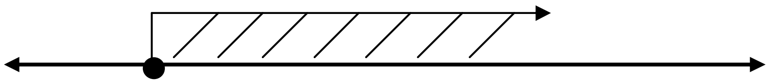
- ∞ + ∞
a

h) Cerrado por la izquierda que se extiende hacia la derecha:

Notación: $[a,+\infty)$

En forma de conjunto: $[a,+\infty) = \{x \in IR \,/\, x \geq a\}$

Representación Gráfica:



- ∞ a + ∞

<u>Desigualdad</u>:

La **desigualdad** es una expresión que indica que una cantidad es mayor o menor que otra, y sus signos son > que se lee **mayor que**, y < que se lee **menor que**. 5 > 3 se lee 5 **mayor que** 3; - 4 < - 2 se lee - 4 **menor que** - 2.

Una cantidad *a* es **mayor** que otra cantidad *b* cuando la diferencia *a* - *b* es positiva. Así, 4 es mayor que - 2 porque la diferencia 4 - (- 2) = 4 + 2 = 6 es positiva; - 1 es mayor que - 3 porque - 1 - (- 3) = - 1 + 3 = 2 es una cantidad **positiva**.

Una cantidad *a* es **menor** que otra cantidad *b* cuando la diferencia *a* - *b* es negativa: Así, - 1 es menor que 1 porque la diferencia - 1 - 1 = - 2 es negativa: - 4 es menor que - 3 porque la diferencia - 4 - (- 3) = - 4 + 3 = - 1 negativa.

Según lo anterior, cero es **mayor que cualquier cantidad negativa**, por lo tanto 0 es mayor que - 1 porque 0 - (- 1) = 0 + 1 = 1, cantidad positiva.

El **primer miembro** de una desigualdad es la expresión que está a la izquierda y el **segundo miembro** está a la derecha del signo de desigualdad.

En $a + b > c - d$ el primer miembro es $a + b$ y el segundo $c - d$.

Los **términos** de una desigualdad son las cantidades separadas de otras por el signo + ó **-**, o por la cantidad que está sola en un miembro.

En la desigualdad anterior los términos son a, b, c y $- d$.

Dos desigualdades son del **mismo signo** o **subsisten en el mismo sentido** cuando sus primeros miembros son mayores o menores que los segundos.

De este modo, $a > b$ y $c > d$ son desigualdades del mismo sentido.

Dos desigualdades son de **signo contrario** o **no subsisten en el mismo sentido** cuando sus primeros miembros no son mayores o menores que los segundos. Así, $5 > 3$ y $1 < 2$ son desigualdades de sentido contrario.

PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES:

1) Si a dos miembros de una desigualdad se les suma o resta una misma cantidad, el signo de la desigualdad no varía.

Dada la desigualdad $a > b$, podemos escribir:

$a + c > b + c$ y $a - c > b - c$

En una desigualdad un término cualquiera puede pasar de un miembro al otro cambiándole el signo.

En la desigualdad $a > b + c$ podemos pasar c al primer miembro con signo **-** y quedará $a - c > b$, porque equivale a restar c a los dos miembros.

En la desigualdad $a - b > c$, podemos pasar b con signo + al segundo miembro y quedará $a > b + c$, porque equivale a sumar b a los dos miembros.

2) Si dos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por una misma cantidad positiva, el signo de la desigualdad no varía.

Dada la desigualdad $a > b$ y siendo c una cantidad positiva, podemos escribir:

$$ac > bc \quad y \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

Es posible **suprimir denominadores** en una desigualdad **sin que varíe** el signo de la desigualdad, porque ello equivale a multiplicar todos los términos de la desigualdad, o sea sus dos miembros, por el m. c. m. de los denominadores.

3) Si dos miembros de una desigualdad se **multiplican** o **dividen** por una misma **cantidad negativa**, el signo de la desigualdad varía.

Si en la desigualdad $a > b$ multiplicamos ambos miembros por $-c$, tendremos:

$$-ac < -bc$$

y dividiéndolos por $-c$, o sea multiplicando por $-\frac{1}{c}$, tendremos:

$$-\frac{a}{c} < -\frac{b}{c}$$

Al cambiar el signo a **todos** los términos, es decir, a los **dos miembros** de una desigualdad, el signo de ésta **varía** porque equivale a multiplicar los dos miembros de la desigualdad por - 1.

Si en la desigualdad $a - b > -c$ cambiamos el signo a todos los términos, tendremos:

$$b - a < c$$

4) Si cambia el **orden** de los miembros, la desigualdad **cambia de signo.**

Si $a > b$ es evidente que $b < a$

5) Si se invierten los **dos miembros**, la desigualdad **cambia** de signo.

Siendo $a > b$ se tiene que $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

6) Cuando los miembros de una desigualdad son **positivos** y se elevan a una misma **potencia positiva**, el signo de la desigualdad no cambia.

$5 > 3$ y elevando al cuadrado: $5^2 > 3^2$ o sea $25 > 9$

7) Si los dos miembros o **sólo uno** es negativo y se eleva a una potencia **impar positiva**, el signo de la desigualdad **no** cambia.

Siendo $-3 > -5$ y elevando al cubo:

$(-3)^3 > (-5)^3$ o sea $-27 > -125$

Siendo $2 > -2$ y elevando al cubo:

$2^3 > (-2)$ o sea $8 > -8$

8) Si los **dos** miembros son **negativos** y se elevan a una **misma potencia par positiva**, el signo de la desigualdad **cambia.**

Siendo $-3 > -5$ y elevando al cuadrado:

$(-3)^2 = 9$ y $(-5)^2 = 25$ y queda $9 < 25$

9) Cuando un miembro es **positivo** y otro **negativo**, y ambos se elevan a una misma potencia par positiva, el signo de la desigualdad puede cambiar.

Siendo 3 > - 5 y elevando al cuadrado:

$3^2 = 9$ y $(-5)^2 = 25$ y queda 9 < 25 (cambia)

Siendo 8 > - 2 y elevando al cuadrado:

$8^2 = 64$ y $(-2)^2 = 4$ y queda 64 > 4 (no cambia)

10) Cuando los dos miembros de una desigualdad son positivos y se les **extrae una misma raíz positiva**, el signo de la desigualdad no cambia.

a > *b* y *n* es positivo, tendremos:

$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

11) Si dos o más desigualdades del mismo signo se suman o multiplican miembro por miembro, resulta una desigualdad del mismo signo.

Si $a > b$ y $c > d$, tendremos:

$a + c > b + d$ y $ac > bd$

12) Cuando dos desigualdades del mismo signo se restan o dividen miembro por miembro, el resultado no necesariamente será una desigualdad del mismo signo, pues, puede ser una igualdad.

En 10 > 8 y 5 > 2, restando miembro por miembro: 10 - 5 = 5 y 8 - 2 = 6; luego, queda 5 < 6 (cambia el signo).

Al dividir miembro por miembro las desigualdades 10 > 8 y 5 > 4 tenemos

$\frac{10}{5}10 = 2$ *y*

$\frac{8}{4} = 2$; luego, queda 2 = 2 (igualdad).

- **<u>INECUACIONES</u>:**

Una **inecuación** es una desigualdad en la que hay una o más cantidades desconocidas (incógnitas) y que sólo se verifica para determinados valores de las incógnitas. Las inecuaciones también se conocen como **desigualdades de condición.**

La desigualdad $2x - 3 > x + 5$ es una inecuación porque tiene la incógnita x y sólo se verifica para cualquier valor de x mayor que 8.

Para $x = 8$ se convertiría en una igualdad y para $x < 8$ en una desigualdad de signo contrario.

Para resolver una **inecuación** deben encontrarse los valores de las incógnitas que satisfagan la inecuación.

La resolución de inecuaciones se fundamenta en las propiedades de las desigualdades antes expuestas y en las **consecuencias** que de las mismas se derivan.

Ejemplos :

1) Resolver $2x - 3 > x + 5$

Pasando x al primer miembro y 3 al segundo tenemos:

$$2x - x > 5 + 3$$

Reduciendo $x > 8$

8 es el límite inferior de x, es decir que la desigualdad sólo se verifica para los valores de x mayores que 8.

2) Hallar el límite de x en $7 - \frac{x}{2} > \frac{5x}{3} - 6$

Suprimiendo denominadores: $42 - 3x > 10x - 36$

Trasponiendo: $- 3x - 10x > - 36 - 42$

$$- 13x > - 78$$

Cambiando el signo a los dos miembros, lo cual hace cambiar el signo de la desigualdad, tenemos: $13x < 78$

Dividiendo por 13: $x < \frac{78}{13}$ o sea $x < 6$

6 es el límite superior de x, es decir que la desigualdad sólo se verifica para los valores de x menores que 6.

3) Encontrar el límite de x en $(x + 3)(x - 1) < (x - 1)^2 + 3x$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$x^2 + 2x - 3 < x^2 - 2x + 1 + 3x$$

Suprimiendo x^2 en ambos miembros y transponiendo:

$$2x + 2x - 3x < 1 + 3$$

$$x < 4$$

4 es el límite superior de x .

- **<u>Inecuaciones Simultáneas o Sistemas de Inecuaciones</u>:**

Las inecuaciones simultáneas son aquellas que tienen soluciones comunes.

Ejemplos:

1) Qué valores de x satisfacen las inecuaciones:

$2x - 4 > 6$

$3x + 5 > 14$

Resolviendo la primera:

$2x > 6 + 4$

$2x > 10$

$x > 5$

Resolviendo la segunda:

$3x > 14 - 5$

$3x > 9$

$x > 3$

La primera inecuación se satisface para $x > 5$ y la segunda para $x > 3$, luego tomamos como solución general de ambas $\mathbf{x > 5}$, ya que cualquier valor de x mayor que 5 será mayor que 3.

Por tanto, el límite inferior de las soluciones comunes es 5.

2) Hallar el límite de las soluciones comunes a las inecuaciones:

$3x + 4 < 16$

$- 6 - x > - 8$

Resolviendo la primera:

$3x < 16 - 4$

$3x < 12$

$x < 4$

Resolviendo la segunda:

$- x > - 8 + 6$

$- x > - 2$

$x < 2$

La solución común es $\boldsymbol{x < 2}$, ya que todo valor de x menor que 2 evidentemente es menor que 4.

Por tanto, 2 es el límite superior de las soluciones comunes.

3) Encontrar el límite superior e inferior de los valores de x que satisfacen las inecuaciones:

$5x - 10 > 3x - 2$

$3x + 1 < 2x - 6$

Resolviendo la primera:

$5x - 3x > - 2 + 10$

$2x > 8$

$x > 4$

Resolviendo la segunda:

$3x - 2x < 6 - 1$

$x < 5$

La primera se satisface para $x > 4$ y la segunda para $x < 5$, luego todos los valores de x que sean a la vez mayores que 4 y menores que 5, satisfacen ambas inecuaciones.

Por tanto, 4 es el límite inferior y 5 el límite superior de las soluciones comunes, y esto se expresa **4 < *x* < 5.**

- **Inecuaciones con Valor Absoluto:**

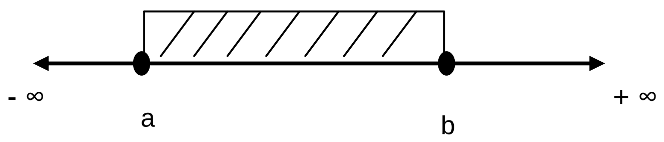
Para resolver una inecuación con valor absoluto nos basamos en las siguientes propiedades:

Primera Propiedad:

$$|ax+b| \le c \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} ax+b \le c & S_1 \\ & \\ ax+b \ge -c & S_2 \end{array} \right\}$$

En este caso la solución total de la inecuación con valor absoluto es la intersección de las dos inecuaciones; es decir:

$$S_t = S_1 \cap S_2$$



$$S_t = \{x \in IR \ / \ a \le x \le b\}$$

Segunda Propiedad:

$$|ax+b| \ge c \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} ax+b \ge c & S_1 \\ & \\ ax+b \le -c & S_2 \end{array} \right\}$$

En este caso la solución total de la inecuación con valor absoluto es la unión de las dos inecuaciones; es decir:

$$S_t = S_1 \cup S_2$$

$$S_t = \{x \in IR \ / \ x \ge b \wedge x \le a\}$$

Observación: Esta propiedad también aplica para $|ax+b|<c$ y $|ax+b|>c$

- **Inecuaciones Cuadráticas:**

Son de la forma: $ax^2+bx+c<0$;

$ax^2+bx+c\leq 0$

$ax^2+bx+c>0$;

$ax^2+bx+c\geq 0$

Con: $a,b,c\in IR\ y\ a\neq 0$

Para resolver inecuaciones cuadráticas se utilizan varios métodos, seguiremos uno en general que abarca los siguientes pasos:

1º) Determinamos las raíces de la ecuación de segundo grado.

$ax^2+bx+c=0$

2º) Factorizamos ax^2+bx+c en la forma:

$a(x-x_1)\cdot(x-x_2)$

3º) Ubicamos las raíces en una recta real para formar los intervalos:

$(-\infty,x_1)$; $(x_1;x_2)$y $(x_2;+\infty_1)$ siendo $x_2>x_1$

4º) Determinamos los signos de cada intervalo tomando un valor arbitrario para cada intervalo en estudio y se sustituye dicho valor en el producto de los factores formados.

5º) La solución de la Inecuación van a ser los intervalos que tengan los signos que satisfagan a la Desigualdad.

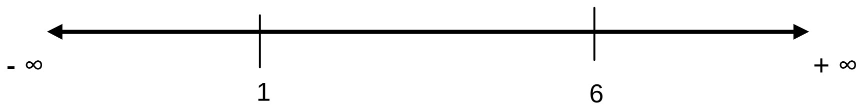
Ejemplo:

Resolver la siguiente inecuación $x^2-7x+6\leq 0$

Los raíces de $x^2-7x+6=0$ son $x_1=1$ y $x_2=6$

Si factorizamos nos queda: $(x-1)\cdot(x-6)$

Ubicando las raíces en una recta real tenemos:



Hacemos el estudio de signos aplicando el siguiente cuadro:

	$(-\infty,1)$	$(1,6)$	$(6;+\infty)$
$(x-1)$	-	+	+
$(x-6)$	-	-	+
$(x-1)\cdot(x-6)$	+	-	+

Si llamamos I = x^2-7x+6 = $(x-1)\cdot(x-6)$ (Inecuación)

Podemos decir que la solución de la Inecuación es:

$Sol=[1,6]$; ya que este intervalo satisface el signo de la desigualdad.

Observación:

Si $I\geq 0 \Rightarrow Sol=(-\infty,1]\cup[6,+\infty)$

Si $I<0 \Rightarrow Sol=(1,6)$

Si $I>0 \Rightarrow Sol=(-\infty,1)\cup(6,+\infty)$

•

Ejercicios Propuestos

Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $\frac{x^2-3x+1}{3} \leq x^2 - \frac{2x^2}{3}$ **R.** $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$

b) $\frac{(x-3)^3}{3} - 8x + \frac{1}{5} \leq \frac{x^3}{3} - 3x^2 + x - \frac{44}{5}$ **R.** $\varnothing$

c) $\frac{x-2}{3} - \frac{2x^2-1}{2} \leq \frac{1}{4} - x^2$ R. $\left(-\infty,\frac{5}{4}\right]$

d) $\frac{(x-1)^2}{3} \geq \frac{x^2}{3} + \frac{7x}{2} - 8$ R. $(-\infty,2]$

10-. Resolver.

a) $\begin{cases} \frac{3(x+2)-1}{4} + \frac{1}{2} > x + \frac{1}{3} \\ 2x - \frac{4-3x}{2} + \frac{1}{3} < \frac{x+3}{2} \end{cases}$ **R:** $\left(-\infty,\frac{19}{18}\right)$

b) $\left|3(x+2) + \frac{1}{4}\right| < 2$ **R:** $\left(\frac{41}{60},+\infty\right)$

11-. Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $x^2 - x - 6 \leq 0$ **R:** $[2,3]$

b) $2x^2 - 5x + 2 > 0$ **R:** $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right) \cup (2,+\infty)$

c) $-9x^2+6x-1\leq 0$ **R:** $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right]\cup\left[\dfrac{1}{3},+\infty\right)=IR$

d) $(x+3)(x+4)>0$ **R:** $(-\infty,-4)\cup(-3,+\infty)$

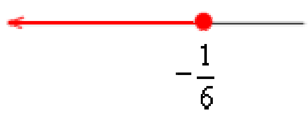
e) $4x^2+9x<9$ **R:** $\left(-3,\dfrac{3}{4}\right)$

f) $1-x-2x^2\geq 0$ **R:** $\left[-1,\dfrac{1}{2}\right]$

g) $x^2-2x+2<0$ **R:** $\varnothing$

a)

$$-x+\frac{2}{3}\geq x+1$$



$$-2x\geq\frac{1}{3}$$

$$2x\leq-\frac{1}{3}$$

$$x\leq-\frac{1}{6}$$

$$x\in\left(-\infty,-\frac{1}{6}\right]$$

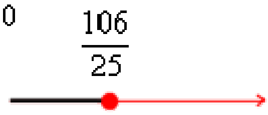
b)

$$\frac{x-1}{-3}+\frac{1}{5}\leq\frac{x}{2}-3$$

$$-10x+10+6\leq 15x-90$$

$$-25x\leq-106$$

$$25x\geq 106$$



$$x\geq\frac{106}{25}$$

$$x\in\left[\frac{106}{25},+\infty\right)$$

RESOLVER:

01) $3x < 15$

02) $3x + 6 > 2x + 12$

03) $4x - 8 > 3x - 14$

04) $10x + 24 < 16x + 12$

05) $\frac{3x}{4} + \frac{1}{2} < \frac{2x}{3} - \frac{1}{4}$

06) $-2x + 3 > -3x - 1$

07) $5(x + 6) - 5 > -10$

08) $\frac{x+2}{3} + \frac{x-3}{2} \geq 5$

09) $\frac{3x-1}{3} + \frac{x-3}{3} \leq 0$

10) $6 + 3(x + 1) > 7 + 4(x - 1)$

11) $5 - [2x + (x + 2)] < 4$

12) $\frac{1}{4}(x+2) + \frac{1}{3}(x+3) \geq 5$

13) $2(x+\frac{1}{2}) + 3(x+\frac{1}{3}) > 4(x+\frac{1}{4})$

14) $2x - 3 - 4(x^2 - 5) > 20 + 5x - 4x^2$

15) $7x(2x + 5) - 5x(2x + 3) < (2x + 4)^2$

16) $(4x + 2)(4x + 9) \leq (4x + 6)^2$

17) $\sqrt{3}x - \sqrt{3} \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$

18) $2\sqrt{3}x + 18 < 12 - 4\sqrt{3}x$

19) $\dfrac{2x+1}{2x-1} > \dfrac{5x-5}{5x+6}$

20) $\dfrac{x+2}{2} - \dfrac{3}{x+1} > \dfrac{x}{2}$

RESPUESTAS

01) $x < 5$

02) $x > 6$

03) $x > -6$

04) $x > 2$

05) $x < -9$

06) $x \geq -4$

07) $x \geq -13$

08) $x \geq 9$

09) $x \leq 1$

10) $x < 6$

11) $x > -\dfrac{1}{3}$

12) $x \geq 6$

13) $x > -1$

14) $x < -1$

15) $x < 4$

16) $x \geq -4.5$

17) $x \geq \dfrac{4}{3}$

18) $x < -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

19) $x > -\dfrac{1}{32}$

20) $x > 2$